Edwin Gräupl

Wahrheit in der Mathematik

Nominalismus und Biologie

2012

Was ist Wahrheit?

1

Wahrheit in der Mathematik

Denn die Mathematik ist doch ein anthropologisches Phänomen

L. Wittgenstein (BGM V 26)

Motiv und Wurzel dieses Aufsatzes sind die Fragen: Wie sicher gilt ein mathematischer Satz? Ist es sinnvoll, an einem anerkannten mathematischen Satz zu zweifeln? Welche Bedingungen müssen erfüllt sein, damit ein mathematischer Satz als wahr anerkannt wird? Üblicherweise prüft man die Wahrheit eines Satzes durch Vergleich seines Inhaltes mit den Dingen, über die etwas ausgesagt wird (1). Wir sollten uns also mit den mathematischen Gegenständen vertraut machen.

Das mathematische Objekt

Bevor wir uns mit dem Wesen derartiger Gebilde, wie sie etwa ein Kreis, ein Dreieck oder eine Zahlenfolge sind, beschäftigen (2), wollen wir zum Vergleich konkrete Gegenstände, Objekte der physischen Welt, betrachten.

Mit (physischem) „Gegenstand" könnte man den Verursacher eines bestimmten, als solchen wiedererkennbaren Komplexes von Empfindungen bezeichnen. Habe ich also bestimmte visuelle Eindrücke, Tastempfindungen usw., so sage ich etwa: „Da ist ein Tisch!" Nun kann es aber vorkommen, daß ich durch veränderte Beleuchtung, veränderten Blickwinkel, durch die Umwelttemperatur beeinflussten Tastsinn und so fort die

Feststellung „Da ist ein Tisch" nicht mache, obwohl ich es unter normalen Umständen täte. Um diesen lästigen Tatbestand zu umgehen, werde ich unter einem Gegenstand eine bestimmte Struktur meines Erfahrungsraumes begreifen.

Dem Gegenstand entspricht eine Regel, nach der bei bestimmtem Verhalten gewisse Empfindungen gewonnen werden. Metaphorisch gesagt, legt der Gegenstand die Pfade im Erfahrungsraum fest, die ich im Umgang mit ihm gehen kann, wobei es meine Sache bleibt, welche Pfade ich gehe, es sei denn, die Initiative ist mir entglitten. Da diese Pfade endlos sind, kann ein Gegenstand eben nur, wenn überhaupt, durch die eventuell endlich beschreibbare Struktur des Erfahrungsraumes gekennzeichnet werden, aus der dann die Natur der „Pfade" folgt. Wie ist das nun bei den Gegenständen der Mathematik?

Der Erfahrungsraum wird hier durch die Sprache, die in ihm möglichen Empfindungen durch Sätze in der Sprache ersetzt. Auch hier entspricht dem Gegenstand eine Regel, nur daß sie nicht den Zusammenhang zwischen Situation und Empfindung, sondern zwischen Situation und Satz bestimmt. Die Regel des physischen Gegenstandes erfüllt sich ohne mein bewußtes Zutun, die Regel des mathematischen Gegenstandes muß durch mich in der Sprache wirksam gemacht werden.

Der mathematische Gegenstand gewinnt seine Existenz durch die andauernde Tat des Menschen.

Aus diesen Überlegungen folgt, dass man ein mathematisches Objekt, das seine Existenz notwendig immer dem Menschen verdankt, nur solcher Eigenschaften fähig erachten sollte, die Sätzen entsprechen, die von Menschen unter Beachtung des korrekten Sprachgebrauches aus der entsprechenden Regel hergeleitet werden können.

Wie die Erfahrung lehrt, neigt die Mehrheit der Mathematiker dazu, die Einschränkung . . . „von Menschen". . . zu übersehen und damit ohne vorsichtige Zurückhaltung eine Wissenschaft zu betreiben, die gefahrlos nur für „unendliche Geister" möglich ist (aber natürlich von „ganz gewöhnlichen Menschen" gemacht wird). Es ist leicht zu glauben, daß der übermütige Zwerg in den allzu großen Schuhen eines „unendlichen Geistes" oft ins Stolpern gerät (3).

Wahrheit in der Mathematik

Immerhin können wir nun eine vorläufige Definition der Wahrheit in der Mathematik geben: Wir halten einen mathematischen Satz für wahr, wenn er unter Beachtung des korrekten Sprachgebrauches aus der Regel des jeweiligen mathematischen Gegenstandes hergeleitet wird.

Diese Definition wird nur dann sinnvoll sein, wenn sie angewandt werden kann: woher gewinnt man aber die Sicherheit, dass die Regel korrekt verwendet wurde? Was ist überhaupt ein sicheres Urteil?

Sicher wird man ein Urteil eine Behauptung dann nennen, wenn daran kein Zweifel möglich ist, ja jeder Zweifel als unsinnig erscheint. Es gibt nur eine menschliche Situation, in der schon der Gedanke an einen Zweifel absolut widersinnig ist, nämlich die Empfindung eines starken Gefühls, etwa heftigerZahnschmerzen. Wer in einer derartigen Situation eine entsprechende Aussage macht, z. B.: „Ich habe fürchterliche Zahnschmerzen", ist sich der Richtigkeit, der Berechtigung dieser Aussage so sehr bewusst, dass ihm der Gedanke, daran zu zweifeln, ob er auch wirkliche Zahnschmerzen habe, nicht kommen kann. Das scheint aber für die Mathematik nicht von Belang zu sein.

Oft betrachtet man die logischen (und die ihnen ähnlichen mathematischen) Urteile auch als unbezweifelbar sicher. Wir wollen diese (dem Mathematiker sehr angenehme) Meinung an einem Beispiel prüfen:

„Wenn nur Max oder Moritz Pulver in den Pfeifenkopf gestopft haben können und es war nicht Max, so muß es Moritz gewesen sein."

Warum stimmen wir dem zu? Wir erkennen diesen Satz deshalb an, weil hier die Wörter „oder", „und" usw. so gebraucht werden, wie wir es gewöhnt sind. Was aber muss alles erfüllt sein, damit das mit Recht festgestellt werden kann?

Es wird hier vorausgesetzt, daß es einen gleichbleibenden Gebrauch der Wörter gibt. Das heißt, dass der ausreichend lernfähige Mensch diesen Gebrauch erlernt und dann dieses „Programm" unverändert zum Gebrauch der Wörter, sei es aktiv beim Formulieren von Sätzen, sei es passiv beim Verstehen von Nachrichten, bewahrt. Vor allem muss die Möglichkeit ausgeschlossen werden, daß man sich einbildet, dem richtigen Gebrauch zu entsprechen, ohne es aber zu tun; d. h.: aus der subjektiven Sicherheit muß eine objektive Wahrheit werden. Dazu kann man als Kontrolle den gegenseitigen Meinungsaustausch der Fachleute vorschlagen, gewissermaßen eine „Summierung" ihrer Urteile.

Dieser Prozess des Fehlerausgleiches setzt neben der Durchführbarkeit des Austausches der Ansichten über den in Frage stehenden Gebrauch auch noch die Bereitschaft voraus, sich von den Mitmenschen etwas sagen oder zeigen zu lassen. Hier müssen wir zwei Situationen unterscheiden. Es kann einem Menschen ein nebensächlicher oder grundsätzlicher Fehler in seinem Wortgebrauch vorgeworfen werden. Dabei verstehe ich unter einem nebensächlichen Fehler eine Stelle der Überlegung, die ihr Urheber, betrachtet er nur die Lage unbefangen, auch selbst nicht mehr behaupten würde. Schon aus dieser Definition ergibt sich, daß derartige Ungereimtheiten durch unsere „Summierung", also durch Meinungsaustausch, beseitigt werden können.

Ein grundsätzlicher Fehler dagegen betrifft nicht eine Stelle der Überlegung, sondern das Bild, das ihr zugrunde liegt.

Es ist z. B. für die Bildung des kontradiktorischen Satzes notwendig, einen Überblick über alle möglichen Fälle zu haben (4). Was man aber für möglich hält, hängt von dem Bild ab, das man sich von der Situation macht. Gelingt es - was möglich erscheint -, nebensächliche Fehler auszuschließen, so ist jeder logische oder mathematische Beweis und damit der dadurch bewiesene Satz in Bezug auf das zugrunde liegende Bild richtig und wahr. Ob ich den Beweis aber annehme, hängt davon ab, ob ich das Bild akzeptiere. Ob ich das wieder tun werde, hängt von meiner Grundeinstellung, vom Bezugsgerüst meiner Bilder, von meinem Gesamtbild des Lebens überhaupt ab. Wirft man sich grundsätzliche Fehler vor, so heißt das, daß man verschiedene Lebenswege geht, nicht das gleiche Spiel spielt. Da hier und heute die Entscheidung, ob man sich überhaupt mit Logik oder Mathematik, und wenn ja, unter der Verwendung welcher Bilder (des mathematischen Gegenstandes etwa), beschäftigen solle, so oder so getroffen werden kann, muss man sie willkürlich nennen. Das relativiert die Sicherheit unserer Urteile beträchtlich!

Willkür in der Mathematik

Nun erhebt sich die Frage, ob auch die Zustimmung zu einem bestimmten Beweis, wenn die grundlegenden Entscheidungen schon gefallen sind, willkürlich (5) ist oder sich zwangsweise ergibt, ob also die „Summierung" wenigstens in gewissen Kreisen von Menschen durchführbar ist.

Klar ist vorerst, dass „zwangsweise" dabei nicht so gemeint sein kann, dass ich dem Beweis nicht widersprechen könnte, wenn ich auch wollte. Selbstverständlich kann ich 3+4 = 8 behaupten, wenn ich davon wohl auch kaum Vorteile haben werde. Aber während ich 3+4 = 8 behaupte, weiß ich sehr wohl, dass der korrekte Sprachgebrauch 3+4 = 7 lautet. Ich kann also in der Mathematik lügen (was bedeutet, dass ich weiß, was ich zu sagen hätte, aber etwas anderes sage).

Unsere Frage nach der eventuellen Willkür muß sich jetzt mit diesem inneren Wissen (dem Gefühl des „Ja, so gebrauche ich die Wörter" und des „Nein, so sagt man das nicht") beschäftigen. Unterliegt dieses Gefühl meinem Willen?

Die Erfahrung lehrt uns, dass ich etwas nicht dann als richtig einsehe, wenn ich es so will, sondern, dass mir etwas als richtig oder falsch erscheint, also mir wie eine Empfindung entgegentritt. Der Mensch ist in sich nicht derart Einheit, dass er, sobald er etwas sagen will, dies auch für richtig hält. Es gibt eine innere Instanz, die über die Richtigkeit entscheidet: sie unterliegt nach unserer Erfahrung nicht dem Willen des beurteilenden Subjekts. Über einen wichtigen Punkt sind wir bisher stillschweigend hinweggegangen: Wo ist die Regel des korrekten Sprachgebrauchs, von deren Befolgung wir sprechen, festgehalten? In einer Gesellschaft „regelfolgender

Menschen" könnte man diese Regel durch die Praxis ihrer Anwendung festlegen. Ist diese Praxis einheitlich (wirft man sich keine grundsätzlichen Fehler vor), so hat man jetzt anscheinend ein Kriterium (das übrigens wegen desZusammenfallens von definierender Praxis und dem Glauben, einer Regel zu folgen, „Privatregeln" nicht sinnvoll erscheinen läßt) (6) für die Richtigkeit einer Regelanwendung. Allerdings hat man dabei vergessen, daß dazu noch der Vergleich zwischen dieser Praxis und dem konkreten, zu beurteilenden Fall notwendig ist, und-was ist gleich (7)? Die Willkür liegt nun bei dem, der, seinem Gefühl folgend, Gleichheit zu- oder abspricht, denn gleich ist für ihn, was ihm als gleich erscheint (8). Versuche ich hier nochmals den Ausweg auf die Gesellschaft und definiere „gleich" durch seine Verwendung in ihr, so sehe ich, daß man, um „gleich" gleich wie die Gesellschaft zu verwenden, wissen muß, was „gleich" ist.

Dieser Versuch, die „wirkliche" Regel zu definieren, ist also gescheitert, da die Definition nur solange brauchbar ist, wie das Sprachgefühl und Sprachverständnis allgemein gleich sind, dann aber ist sie überflüssig!

Auch ist es keineswegs so, daß ich mich nach der Gesellschaft, nach dem Konsens, richte, denn wenn mir z. B. etwas als rot erscheint, so nenne ich es „rot", ohne vorher andere danach zu fragen. (Woher sollten sie es besser wissen?)

Ein Mensch lehnt einen logischen oder mathematischen Gedankengang, ohne durch noch so geschickte Argumentation darin erschüttert zu werden, dann ab, wenn ihn sein Gefühl anders leitet oder wenn er vorgibt, anders geleitet zu werden. Man lernt den Gebrauch der Wörter nicht durch die Sprache, sondern an Beispielen in der Sprache, ihre Anwendungsregeln entziehen sich in letzter Konsequenz der sprachlichen Argumentation. Diese hat dort ihr Ende, wo sie an das appelliert, was die Diskussion erst sinnvoll macht, nämlich das allgemein gleiche Wortverständnis.

Da das, was letztlich über die Zustimmung oder Ablehnung entscheidet, nicht sprachlich greifbar ist, konnte auch der Verdacht auftreten, daß hier willkürliche Entscheidungen vorlägen, ein Verdacht, der nach unserer Meinung nicht zutrifft. Ich werde daher einen Satz der Mathematik - soweit ich Fachmann bin - dann per Definition für wahr halten, wenn ich nach Meinungsaustausch mit Fachleuten (die das gleiche Spiel wie ich spielen, die dieselben Bilder verwenden) subjektiv sicher bin (wozu kein Willensakt nötig ist), dass er richtig ist.

Anwendbarkeit der Mathematik

Anwendbarkeit der Mathematik

Wie steht es mit der Anwendbarkeit einer so vage „wahren" Mathematik und Logik? Die logischen Sätze sagen nichts aus, sondern bedeuten, daß der, der eine bestimmte Aussage macht, auch bestimmte andere Aussagen damit zugibt.

Man kann ihre Gültigkeit an einer beliebigen realen Situation überprüfen. Dazu beschreibt man ein Stück Welt, wendet die logischen Umformungen auf die Beschreibung an und überprüft die dadurch entstandenen Aussagen durch den Vergleich mit dem vorliegenden Stück Welt. War der Wortgebrauch jetzt und früher gleich und hat sich (die Erinnerung an) die Welt inzwischen nicht verändert, so muss man auch die neuen Aussagen bestätigt finden. Diese Erfahrung hat man bisher immer gemacht, was besagt das aber? Es besagt, dass unser Wortgebrauch (und damit unsere Logik) und die erfahrbare Natur zusammenpassen, also beide konstant oder in gleicher Weise veränderlich sind. Ändern Maßband und Gegenstand in gleicher Weise ihre Ausdehnung, so stört das den Vorgang durchaus nicht, nur den Glauben an ein absolutes Maß muss man fallenlassen. In ähnlicher Weise müssen wir darauf verzichten, aus der Anwendbarkeit der Logik oder Mathematik auf eine darüber hinausgehende absolute Gültigkeit dieser Wissenschaft schließen zu wollen.

Sieht man die zur Vermeidung nebensächlicher Fehler auf den gemeinsamen Sprachgebrauch gegründete Logik als absolut gültig an, so ist das nicht mehr als die damit dokumentierte Absicht, alles andere an der Logik messen zu wollen. Die Absolutsetzung der Logik ist eine (bequeme) Konvention (9).

Der Gebrauch der Wörter

Vergleichen wir nun zusammenfassend die unbezweifelbare Sicherheit einer Empfindung und die durch die allgemeine Erfahrung bewährten Aussagen der Logik und Mathematik miteinander!

Die unbezweifelbare Sicherheit, die wir gerne für die Aussagen der Mathematik bestätigt hätten, gilt nur für das Bewusstsein einer heftigen Empfindung für das empfindende Subjekt. Aber aus der wenn auch noch so sicheren Empfindung, froh oder schmerzgequält zu sein, kann man die Mathematik nicht herleiten. Ich sehe, dass zwei Äpfel, um einen vermehrt, drei Äpfel sind, unmittelbar sicher im Augenblick des Dazugebens ein, aber ich kann durchaus bezweifeln, dass das mit Birnen auch so geht oder dass das bei den Äpfeln morgen noch so sein wird. Da ich in der Mathematik weder über Äpfel noch über Birnen etwas aussagen will, nehme ich „zwei" nicht mehr als Prädikator, der einem Aspekt der Welt zu- oder abgesprochen werden kann, sondern definiere „zwei" als „eins und eins". Erklärt man 3 in entsprechender Weise, so muss man bei konstantem Wortgebrauch zugeben, dass 3 ein Name für 2+1 ist, also 2+1=3 gilt.

Dadurch hat man den mathematischen Satz von den speziellen Erfahrungen an Äpfeln und Birnen getrennt und auf den durch „Summierung" von nebensächlichen Fehlern befreibaren Wortgebrauch begründet. Dieser Wortgebrauch ist, wie wir wissen, Ausdruck unseres autonomen Ichs. Jeder von uns hat vorerst einmal seine Mathematik. Wir werden klären müssen, wie es zu der Mathematik kommt (10). Vorher wollen wir aber zusammenfassen: Wir haben festgestellt, daß sich „Wahrheit" auf den durch die Gesellschaft zusammenwirkender Menschen von nebensächlichen Fehlern gereinigten Sprachgebrauch stützt. Wo ist dieser Wortgebrauch vorbildhaft (als Norm) festgehalten? Ist etwa die Sprachpraxis der Gesellschaft diese Norm und regulierende Instanz?

Wohl erlernt, wie wir festgehalten haben, der Mensch den Sprachgebrauch an Beispielen im Zusammenleben mit der Gesellschaft, aber er benützt diese, hat er die Sprache einmal erlernt, nicht mehr als entscheidende Instanz. Der Mensch handelt, sobald er die Sprache (an Beispielen im Zusammenleben) gelernt hat, autonom, wenn auch nicht willkürlich, und lässt sich nur mehr das von der Gesellschaft an seinem Wortgebrauch und Handeln (freiwillig) ändern, was er bei genauerem Hinsehen auch selbst geändert hätte. Aber auch dann, wenn er sein Handeln bewusst nach der

Gesellschaft richtete, so würde er doch immer, wie wir gesehen haben, das tun, was ihm als gleich mit dem Handeln der anderen Menschen erschiene. Gleich ist für ihn aber, was ihm als gleich erscheint. So richtet sich, hat er die Sprache einmal erlernt, der Mensch in ihrem Gebrauch nach seinem (notwendig subjektiven) Gefühl. Es ist daher bemerkenswert, dass die Menschen einander verstehen, daß die Mathematiker in ihren Aussagen (meist) übereinstimmen (11).

Noch merkwürdiger wird diese Übereinstimmung (12) im Licht der folgenden Überlegung. In der Sprache kann, des unendlichen Regresses wegen, weder erschöpfend gesagt werden, wie ein Satz gemeint ist (13), noch, wäre dies doch möglich, wie er dann an jenem Ort zu jener Zeit zu deuten sei (14), und wäre auch das noch erreichbar, was nützte mir die Erklärung, die ich jetzt habe, dann (15)? Für das Erlernen der Sprache an (notwendig endlich vielen) Beispielen im Leben muss das doch katastrophale Folgen haben! Wir aber bleiben von solchen Folgen offenbar verschont. Wittgenstein etwas abwandelnd, können wir sagen: Es gibt einen guten Engel (16)!

Der gute Engel Wittgensteins

Diese philosophische Einsicht ist nicht gerade befriedigend; wie kann die Existenz einer überindividuellen und anwendbaren Mathematik einsichtig gemacht werden? Augenscheinlich ist es unmöglich, auf einer rein philosophischen Ebene hier Ergebnisse zu erzielen, sofern man nicht wie Plato Existenzaussagen über ideale Gegenstände wagt (17). Ich glaube, daß das besprochene Phänomen nur durch eine unverkürzte Weltsicht erklärbar wird; die Erkenntnisse der Naturwissenschaft müssen einbezogen werden! Die Biologie lehrt uns, daß der Mensch in seinem Nervensystem bestimmte Dispositionen besitzt, die sich im Laufe der Evolution gebildet haben. Der Mensch denkt und handelt nicht im Vakuum einer reinen (und, wie wir gesehen haben, verzweiflungsvoll nihilistischen) Geistigkeit, sondern - solange er gesund ist- in den Bahnen einer durch Jahrmillionen auf Erfolg geprüften geistigen Struktur. Diese das Überleben gewährleistende physische Basis des Denkens ist allen Menschen gemeinsam (18); sie ist der gute Engel Wittgensteins! Wir erkennen: Auch in der abstrakten Geistigkeit der Mathematik kann sich der Mensch nicht von der Natur emanzipieren (19).

Anmerkungen

2

Anmerkungen

(1) Bei Thomas v. Aquin liest man - ganz der platonischen und aristotelischen Tradition entsprechend - folgende Definitionen der Wahrheit:

Veritas est adaequatio rei et intellectus (diese Definition schreibt Thomas v. Aquin dem neuplatonischen Philosophen Isaac Israeli zu).

Veritas est adaequatio intellectus et rei, secundum quod intellectus dicit esse, quod est, vel non esse, quod non est. (Hier klingt Aristoteles fast wörtlich durch.)

(2) Aristoteles sagt in der Metaphysik, Buch M:

(1077b15). . . ist es offenbar, daß die mathematischen Dinge entweder überhaupt nicht existieren oder nur in gewisser Weise und deshalb nicht schlechthin existieren.

(1078al) Wenn nämlich dasjenige, wovon sie (die Geometrie) handelt, in akzidenteller Weise sinnlich erfassbar ist, sie aber nicht davon handelt, insofern es sinnlich erfassbar ist, so werden die mathematischen Wissenschaften nicht Wissenschaften der Sinnesdinge sein, aber auch nicht Wissenschaften von etwas anderem, das getrennt von dem sinnlich Erfassbaren existiert. Thomas v. Aquin sagt in seinem Boethius - Kommentar:

(qu. 5a 1 corp. art.) Quaedam vero sunt, quae quamvis dependeant a materia secundum esse, non tarnen sedundum intellectum, quia in eorum definitionibus non ponitur materia sensibilis, sicut linea et numerus. Et de his est rnathematica.

Nicolai Hartmann sagt in seinem Buch: Zur Grundlegung der Ontologie (4. Auflage, Berlin 1965), pag. 229:

... die Größe der Winkelsumme wird nicht vom Begriff des Vielecks ausgesagt, sondern vom Vieleck selbst; und man meint dabei das Vieleck nicht, sofern es gedacht wird, sondern sofern es an sich und seinem eigenem Wesen nach so „ist". Ja, man weiß dabei auch sehr wohl, daß alles so oder anders Denken an diesem „Sosein" des Vielecks nichts ändert.

(3) Literaturhinweise zur sogenannten Grundlagenkrise der Mathematik findet man in Gräupl, Bemerkungen zum „Tertium non datur"; im Anhang angefügt.

(4) Wer im Sinne Platons an das ewige Sein mathematischer Gegenstände glaubt, kann sagen: Eine unendliche Menge (etwa N) hat eine Eigenschaft, oder sie hat sie nicht, kein Drittes! L. E. Brouwer (siehe etwa: Intuitionistische Mengenlehre, Jahresbericht deutsch. Math. Ver. 28, p. 203-208) argumentiert dagegen ungefähr so (vgl. Gräupl, op. cit.):

Wegen der prinzipiellen Unmöglichkeit der unmittelbaren Inspektion kann man vom Standpunkt des Menschen aus gesehen nicht davon sprechen, daß die Elemente einer unendlichen Menge eine Eigenschaft haben, sondern nur davon, dass es einen Beweis dafür gibt, dass sie alle diese Eigenschaft besitzen müssen. Ebenso muss man im Falle der Verneinung der Eigenschaft das dadurch ausdrücken, daß man sagt: Es gibt einen Beweis dafür, dass die Elemente der unendlichen Menge diese Eigenschaft nicht haben. Offensichtlich bildet das Paar „Es gibt einen Beweis, dass . . ." und „Es gibt einen Beweis, dass nicht..." nur dann eine Kontradiktion, wenn sich jede Frage nach den Eigenschaften einer auf unendliche Mengen von Gegenständen durch einen Beweis, also in endlich vielen Schritten, beantworten lässt. Damit ist es nach Brouwer einsichtig, dass die Anwendung des „Tertium non datur" auf unendliche Mengen bedeutet, dass man an das Lösbarkeitsaxiom oder, philosophisch formuliert, an die prinzipielle Möglichkeit der Inspektion unendlicher Mengen, also an ihre aktuale Existenz, glaubt. Da es in der Mathematik vorgeblich um die Wahrheit geht, sollte man sich von dieser metaphysischen Annahme (Platonismus) trennen und die Wissenschaft bescheiden und vorsichtig, vom Standpunkt endlicher Menschen aus, ohne das „Tertium non datur" für unendliche Gesamtheiten betreiben.

(5) Das Problem über das Verhältnis zwischen Willen und Erkenntnis hat eine lange (theologische) Geschichte. Beispielhaft dazu Descartes (zitiert nach Heimsoeth: Die sechs großen Themen der abendländischen Metaphysik, Darmstadt 1965, pag. 230):

. . . car c'est en Dieu une même chose de vouloir, d'entendre et de créer. Ex hoc ipso quod aliquid velit, ideo cognoscit, et ideo tantum talis res est vera.

(6) L. Wittgenstein, Philosophische Untersuchungen (PU) 202:

Darum ist „der Regel folgen" eine Praxis, und der Regel zu folgen glauben ist nicht: der Regel folgen. Und darum kann man nicht der Regel „privatim" folgen, weil sonst der Regel zu folgen glauben dasselbe wäre, wie der Regel folgen.

(7) Wittgenstein, PU 215:

Aber ist nicht wenigstens gleich: gleich? . . . Also sind zwei Dinge gleich, wenn sie so sind, wie ein Ding? Und wie soll ich nun das, was mir das eine Ding zeigt, auf den Fall der zwei anwenden?

(8) Wittgenstein: Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik (BGM), V 33:

Ein Sprachspiel: Etwas Anderes Bringen; das Gleiche bringen, . . . Aber wie kann ich's Einem erklären? .. . (Man merkt, daß Wittgenstein auch Lehrer gewesen ist!)

(9) Wittgenstein, BGM I 155:

... Die Schritte, die man nicht in Frage zieht, sind logische Schlüsse. Aber man zieht sie darum nicht in Frage, weil sie „sicher der Wahrheit entsprechen" - oder dergleichen - sondern, dies ist es eben, was man „Denken", „Sprechen", „Schließen" und „Argumentieren" nennt.

(10) Ein Lösungsversuch kann aus Aristoteles herausgelesen werden:

Der aktive Intellekt ist einzig, da keine von der Materie getrennte Form individualisiert werden kann. Besonders deutlich ist das bei Ibn Ruschd (Averroes), der aus diesem Grund die individuelle Unsterblichkeit der Seele verneint.

Erschwert wird dieses Problem bei Duns Scotus durch die Haecceitas, bei Wittgenstein durch seinen extremen Nominalismus.

(11) Wittgenstein, PU 240:

Es bricht kein Streit darüber aus (etwa zwischen Mathematikern), ob der Regel gemäß vorgegangen wurde oder nicht.

Es kommt darüber z. B. nicht zu Tätlichkeiten . . .

(12) Wittgenstein, BGM I 35:

. . . wie kommt es dann, daß sich alle Menschen (oder doch alle normalen Menschen) diese Figuren als Beweise dieser Sätze gefallen lassen? - Ja, hier besteht eine große - und interessante - Übereinstimmung.

(13) Wittgenstein, BGM 1113:

. . . ich gebe dir eine Regel, die meine Verwendung deiner Regel rechtfertigt.

(14) Wittgenstein, BGM I 114:

. . . so liegt in einem Folgen immer auch ein Deuten.

(15) Wittgenstein, BGM I 3:

. . . Und wenn ich es zuvor weiß, was hilft mir das Wissen für später?

Diese Argumentation Wittgensteins erinnert im Stil an Gorgias:

. . . dasselbe Subjekt empfindet. . . Verschiedenes zu verschiedenen Zeiten. Um so weniger kann einer dasselbe empfinden, wie ein anderer (zitiert nach: Die Anfänge der abendländischen Philosophie, Artemis Verlag 1949).

(16) Wittgenstein, BGM V 13:

. . . Er habe den Widerspruch abgeleitet, ohne zu merken, daß es einer ist. . . Ein guter Engel hat uns bisher bewahrt, diesen Weg zu gehen. Man könnte, glaube ich, sagen: Ein guter Engel wird immer nötig sein, was immer du tust.

(17) Dazu zu empfehlen:

Stegmüller: Das Universalienproblem einst und jetzt (Darmstadt 1965).

(18) Das ist eine naturwissenschaftlich präzisierte und abgeschwächte Formulierung von Platons Erinnerung an die ewigen Ideen und den eingeborenen Ideen von Descartes.

(19) Man vergleiche damit Henri Bergson: Schöpferische Entwicklung (übersetzt von Gertrud Kantorowicz, Jena 1912 und später) Kapitel III:

Er (der menschliche Intellekt) hat anderes zu leisten. Angeschirrt wie Arbeitstiere im schweren Tagewerk spüren wir das Spiel unserer Muskeln und Gelenke, die Schwere des Karrens und den Widerstand der Scholle: handeln und sich als handelnd wissen, in Kontakt treten mit der Realität, ja sie- nur aber nach ihrer Bedeutung für das werdende Werk, für die Schürfung der Furche - leben, das ist die Funktion des menschlichen Intellekts.

Anhang

3

Bemerkungen zum „Tertium non datur

Häufig verwendet man in der Mathematik den indirekten Beweis, der auf der Gültigkeit des logischen Gesetzes p v ¬p (das nach alter Tradition „Tertium non datur" genannt wird) basiert. Mittels der bekannten Methode der Belegung mit Wahrheitswerten (eingeführt von Wittgenstein im Tractatus logico-philosophicus 6.1203) kann man p v ¬p leicht verifizieren, es scheint daran nicht problematisch zu sein. In den mathematischen Seminaren wird p v ¬p üblicherweise nicht als fragwürdig dargestellt und damit als selbstverständlich in wirksamster Weise tradiert, sagt ja schon Al Ghazali (zitiert nach E. R. Dodds: Die Griechen und das Irrationale, p. 107): „Für den Anhänger eines traditionellen Glaubens ist es die wichtigste Bedingung, nicht zu wissen, daß er einem solchen Glauben anhängt."

Zu Beginn des zwanzigsten Jahrhunderts hat L. E. Brouwer aufgezeigt (siehe etwa: Intuitionistische Mengenlehre, Jahresbericht deutsch. Math. Ver. 28, p. 203-208), dass die Verwendung des Tertium non datur in der Mathematik dem Glauben an das sogenannte Lösbarkeitsaxiom (1900 von Hilbert formuliert) äquivalent sei und fernerhin, dass die Position ein Vorurteil enthalte. Brouwer argumentiert etwa so:

Wegen der prinzipiellen Unmöglichkeit der unmittelbaren Inspektion kann man vom Standpunkt des Menschen aus gesehen nicht davon sprechen, daß die Elemente einer unendlichen Menge eine Eigenschaft haben, sondern nur davon, dass es einen Beweis dafür gibt, dass sie alle diese Eigenschaft besitzen müssen.

Ebenso muss man im Falle der Verneinung der Eigenschaft das dadurch ausdrücken, daß man sagt: Es gibt einen Beweis dafür, dass die Elemente der unendlichen Menge diese Eigenschaft nicht haben. Offensichtlich bildet das Paar „Es gibt einen Beweis, daß..." und „Es gibt einen Beweis, dass nicht..." nur dann eine Kontradiktion, wenn sich jede Frage nach den Eigenschaftten einer auch unendlichen Menge von Gegenständen durch einen Beweis, also in endlich vielen Schritten beantworten läßt. Damit ist es nach Brouwer einsichtig, dass die Anwendung des „Tertium non datur" auf unendliche Mengen bedeutet, dass man an das Axiom der Lösbarkeit oder, philosophisch formuliert, an die prinzipielle Möglichkeit der Inspektion unendlicher Mengen, also an ihre aktuale Existenz glaubt.

Da es in der Mathematik vorgeblich um die Wahrheit geht, sollte man sich von dieser metaphysischen Annahme (Platonismus) trennen und die Wissenschaft bescheiden und vorsichtig, vom Standpunkt endlicher Menschen aus ohne das „Tertium non datur" für unendliche Gesamtheiten betreiben.

Warum sind die Mathematiker in ihrer weitaus überwiegenden Mehrzahl dem Beispiel Brouwers nicht gefolgt? Warum werden

diese Probleme im Rahmen jener Vorlesungen, die ein durchschnittlicher Mathematikstudent hört, nicht diskutiert?

Diese Fragen sind um so berechtigter, als der zur Bekämpfung Brouwers von Hilbert konzipierte „Formalismus", der, von der Wahrheit absehend, nur die Widerspruchsfreiheit der klassischen Mathematik sichern wollte, längst als undurchführbar erkannt worden ist. (K. Gödel: Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme. Mh. Math. Phys. 38).

Sicher hat es eine Rolle gespielt, dass Brouwer sich bis zur Unverständlichkeit verschroben auszudrücken pflegte und das auch noch oft in seiner holländischen Muttersprache. Der Hauptgrund dieses „Streiks der Mathematiker" (Hilbert) liegt aber daran, dass die vorsichtig eingeschränkte Mathematik Brouwers (intuitionistische Mathematik) in ihrer Beweistechnik zu schwierig und in ihren Ergebnissen zu schwach, um praktisch erfolgreich sein zu können.

Dazu ein Zitat aus Paul J. Cohen: Set Theory and the Continuum Hypothesis, p. 46: „In our opinion this is the gravest weakness of the Intuitionist position since Statements which they admit as meaningful have no hope of ever being decided according to their requirements." (Offensichtlich ist es der Piatonismus, der uns jeweils mit einem „deus ex machina" die Lösung schwieriger Probleme liefert.)

Dies alles zeigt, wie ich glaube, dass in der Mathematik nicht die Wahrheit (als reflektierte subjektive Evidenz verstanden) das letzte Kriterium ist, sondern eine bestimmte (noch näher zu untersuchende) Form der Brauchbarkeit.

An dieser Stelle möchte ich gerne noch den späten Wittgenstein (aus den von den Fachleuten, wie z. B. G. Kreisel, so verteufelten „Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik" V 13) zu Wort kommen lassen:

„Die mathematischen Probleme der sogenannten Grundlagen liegen für uns der Mathematik so wenig zu Grunde, wie der gemalte Fels die gemalte Burg trägt."

Man mache sich nun klar, dass jede Stellungnahme zu diesem Problemkreis, erfolge sie unbewusst durch Nachahmung klassischer Haltungen oder bewusst nach erfolgter Reflexion, für die Gestaltung des mathematischen Unterrichts auch im Gymnasium größte Folgen hat; dazu braucht man nur etwa über die reellen Zahlen nachzudenken.

Zur Einführung sei folgende Literatur empfohlen:

O. Becker, Die Grundlagen der Mathematik (Verlag Karl Alber);

P. Bernays, Abhandlungen zur Philosophie der Mathematik (Wiss. Buchg. Darmstadt);

N. Bourbaki, Elemente der Mathematikgeschichte
Vandenhoeck & Ruprecht);

H. Meschkowski, Grundlagen der modernen Mathematik (Wiss.

Buchg. Darmstadt);

S. Körner, Philosophie der Mathematik (Nymphenburger); F. Waismann, Einführung in das mathematische Denken (DTV); H. Weyl, Philosophie der Mathematik und Naturwissenschaft (R. Oldenbourg).

Für weitergehende Studien sei verwiesen auf:

E.W. Beth, The Foundations of Mathematics (North-Holland);

A. Heyting, Intuitionism (North-Holland);

S. C. Kleene, R. E. Vesley, The Foundations of Intuitionistic Mathematics (North-Holland)